

Shear Stresses due to Torsion

اجهادات القص نتيجة عزوم الالتواء

نسألكم الدعاء

Table of Contents

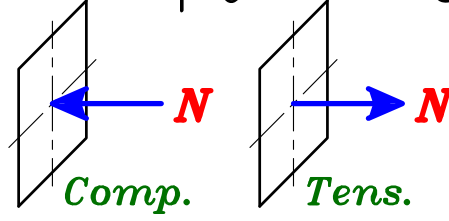
* <i>Straining Actions</i>	-----	<i>Page 2</i>
* <i>Normal Stresses</i>	-----	<i>Page 3</i>
* <i>Shear Stresses</i>	-----	<i>Page 3</i>
* <i>Circular Sections</i>	-----	<i>Page 4</i>
* <i>Examples</i>	-----	<i>Page 8</i>
* <i>Other Types of Sections</i>	-----	<i>Page 26</i>
* <i>Example</i>	-----	<i>Page 32</i>

Straining Actions

درسنا فى العام السابق ال **Straining actions** وهى عبارة عن القوى التى من المحتمل أن تؤثر على أى **Section** وهم ستة **Straining actions**

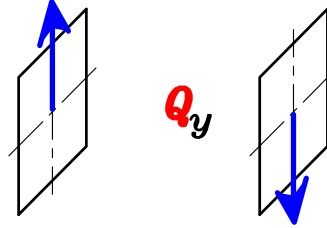
1 - **N (Normal Force)**

و هى القوة فى اتجاه محور (Z) و تكون اما شد أو ضغط



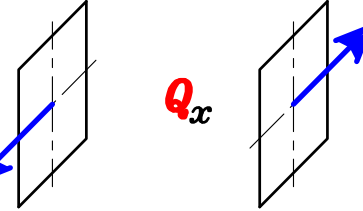
2 - **Q_y (Shear Force)**

و هى القوة فى اتجاه محور (Y)



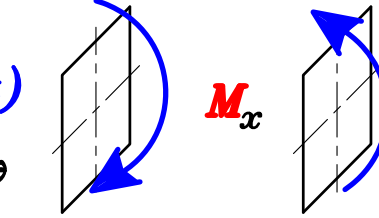
3 - **Q_x (Shear Force)**

و هى القوة فى اتجاه محور (X)



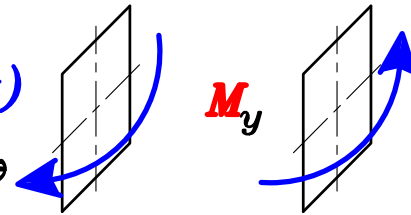
4 - **M_x (Bending moment)**

وهو عزم الدوران حول محور (X)



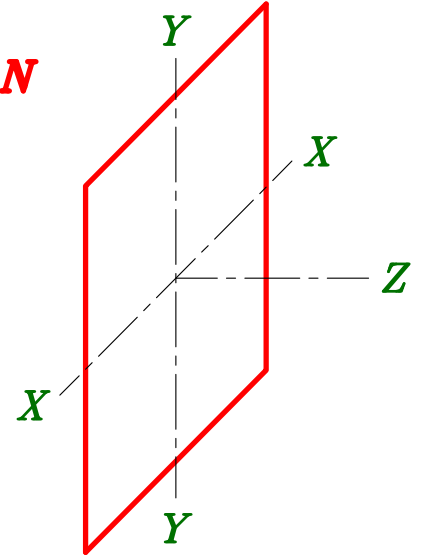
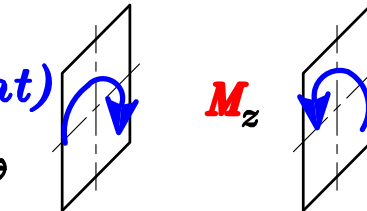
5 - **M_y (Bending moment)**

وهو عزم الدوران حول محور (Y)



6 - **M_z (Torsional moment)**

وهو عزم الدوران حول محور (Z)

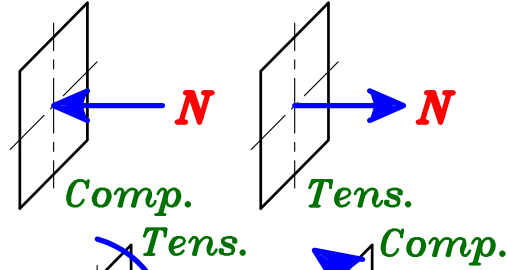


و الستة **Straining actions** ينتج عنهم نوعين من الاجهادات و هما

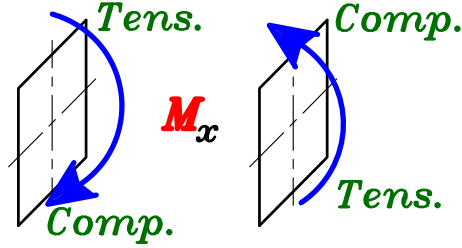
1 – Normal Stresses

و هي ال **Stresses** التي ينتج عنها ضغط أو شد على ال **Section** و قد درسنا هذه ال **Stresses** في العام السابق و ال **Straining actions** التي ينتج عنها هذا النوع هم ثلاثة

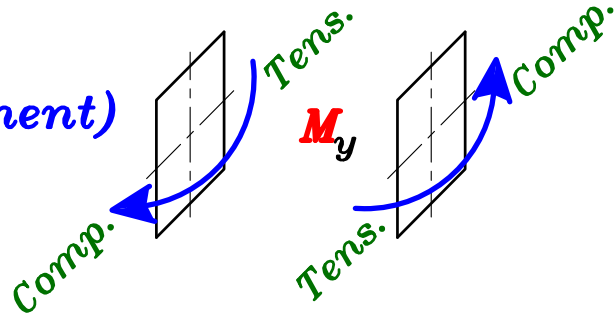
1 – **N** (Normal Force)



2 – **M_x** (Bending moment)



3 – **M_y** (Bending moment)

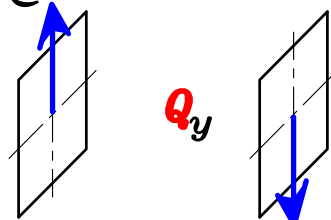


حيث أننا تعلمنا أن ال **Compression** يكون ناحية رأس سهم ال **moment** و ال **Tension** يكون ناحية ذيل السهم .

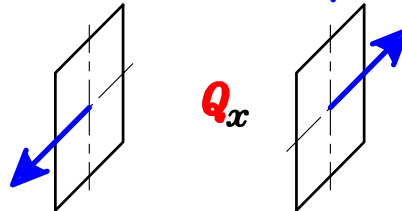
2 – Shear Stresses

و هي ال **Stresses** التي ينتج عنها **Friction** مع ال **Section** و هذه هي موضوع هذا الدرس و ال **Straining actions** التي ينتج عنها هذا النوع هم ثلاثة

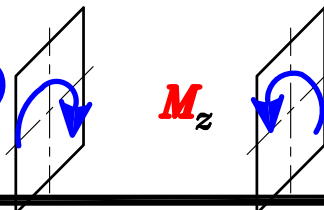
1 – **Q_y** (Shear Force)



2 – **Q_x** (Shear Force)

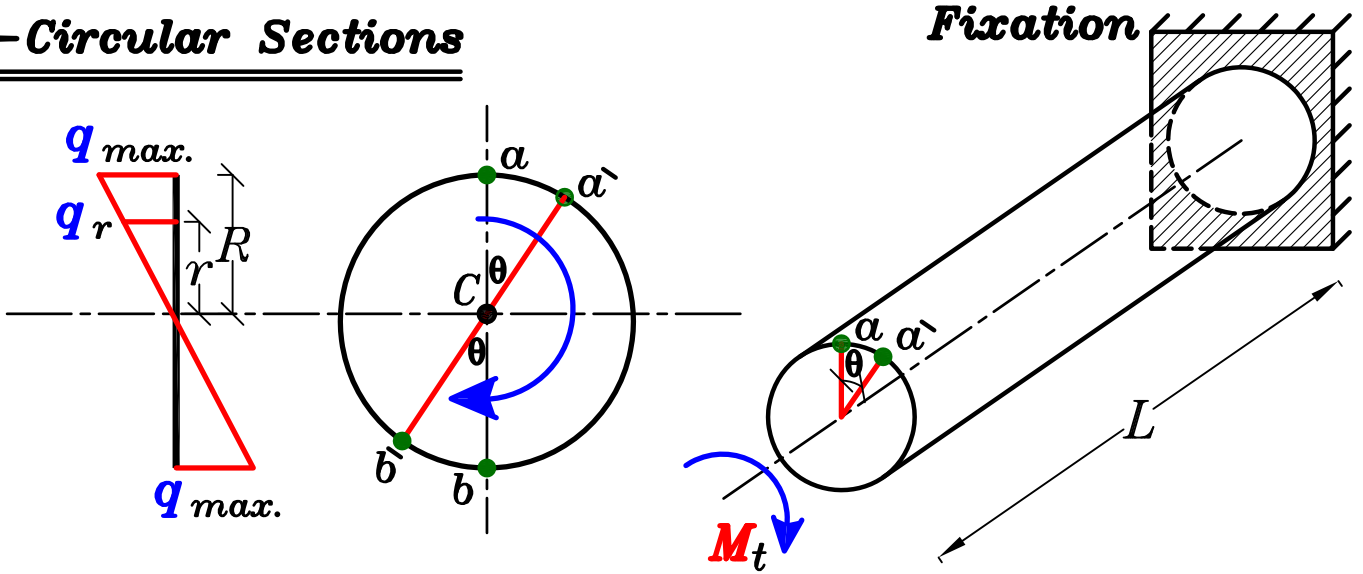


3 – **M_z** (Torsional moment)



و هنا ما يهمنى هو حساب ال **Shear Stresses** نتيجة ال **Torsional moment** حيث أننا درسنا فى الدروس السابقة ال **Shear Stresses** نتيجة ال **Forces** . سوف ندرس ال **Shear Stresses** نتيجة ال **Torsional moment** على جميع أنواع القطاعات و لكن نبدأ بالقطاعات الدائرية (**Circular Sections**) .

1 – Circular Sections



إذا اثرنا على قطاع دائرى **Torsional moment** فهذا معناه أن الكمرة يحدث لها **Twisting** و هذا معناه أننا لو درسنا قطاع فى الكمرة نجد أنه يحدث له احتكاك مع القطاعات المجاورة له و نتيجة هذا ال **Friction** ينتج ال **Shear Stresses** .

نقطة (**a**) تتحرك الى (**a'**) نتيجة ال **Torsional moment** و بالمثل (**b**) أما نقطة (**C**) و حيث أن ال **Shear Stress** يزداد كلما زاد الاحتكاك فهذا معناه أن اكبر **Shear Stress** موجود عند النقط الموجودة على حدود الدائرة حيث أنها النقط التى يحدث لها أكبر حركة و بالتالى هى النقط التى عليها أكبر **Friction** كما يكون ال **Shear Stress** بصفر عند النقطة الموجودة فى مركز الدائرة (**C**) و ذلك لأنها لا تتحرك و بالتالى لا يحدث عليها **Friction** . و تكون المعادلة ال **General** لحساب ال **Shear Stress** نتيجة ال **Torsion** كالتالى

$$\frac{q_{max.}}{R} = \frac{q_r}{r} = \frac{M_t}{I_P} = \frac{\theta G}{L}$$

Where:

$I_P \Rightarrow$ Polar moment of inertia = $I_x + I_y$

$L \Rightarrow$ Length of member from the fixed point

$G \Rightarrow$ Shear modulus $800 \text{ t} \setminus \text{Cm}^2$ و اذا لم يعطى نأخذه

$q \Rightarrow$ Shear stress at any point

$r \Rightarrow$ المسافة من مركز الدائرة الى النقطة التى نحسب عندها
ال Shear stress

$q_{max.} \Rightarrow$ maximum shear stress

$R \Rightarrow$ radius of the circle

$\theta \Rightarrow$ Twisting angle

و من القانون العام السابق من الممكن أن نصل الى القانونين التاليين

$$q_r = \frac{M_t}{I_P} r$$

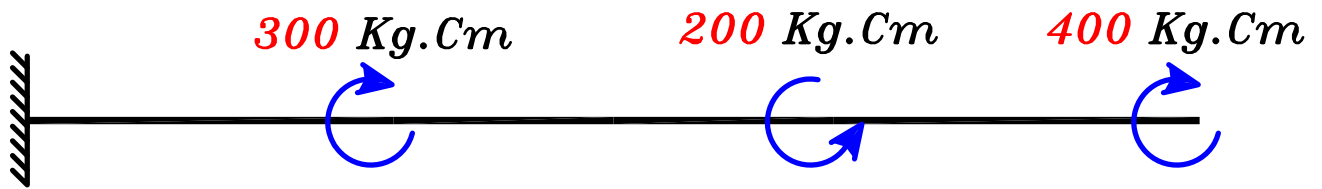
$$\theta = \frac{M_t}{I_P} * \frac{L}{G}$$

و لمعرفة أكبر Shear stress على أى كمرة نحتاج الى أكبر قيمة للـ Torsion على الكمرة و لذلك نحتاج الى رسم Diagram يعبر عن قيم الـ Torsion عند أى Section فى الكمرة و يسمى بالـ $\text{Torsional moment diagram (T.M.D)}$ مثل الـ $(B.M.D \& S.F.D)$.

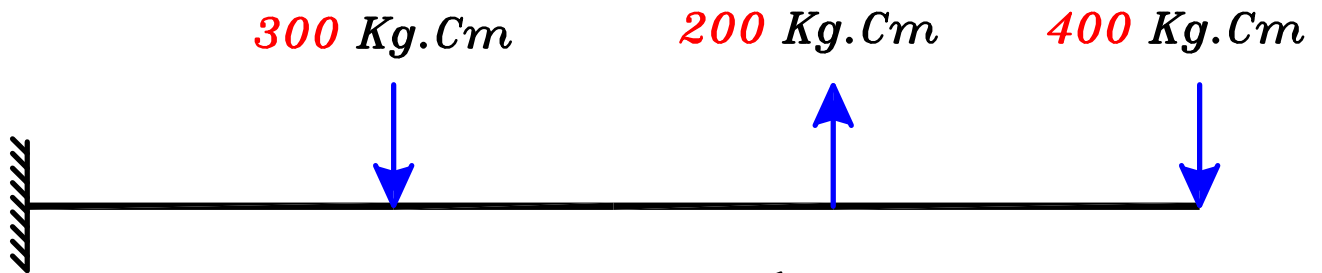
طريقة رسم الـ (T.M.D):

١- نتخيل كما لو كان كل Torsional moment عبارة عن Shear force مع الاخذ فى الاعتبار الاتجاهات حيث نفترض مثلا أن الـ moment اللى بيلىف مع عقارب الساعة تكون الـ Shear force التى نضعها بدلا منه لاعلى و الـ moment اللى بيلىف عكس عقارب الساعة تكون الـ Shear force التى نضعها بدلا منه لاسفل.

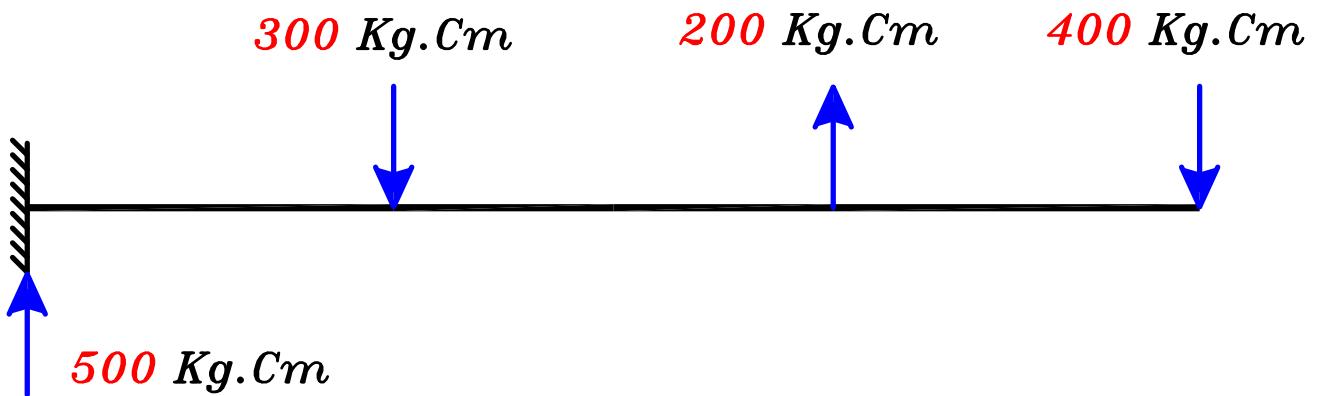
٢- نرسم الـ $(T.M.D)$ بالظبط كما لو كنا نرسم $(S.F.D)$.



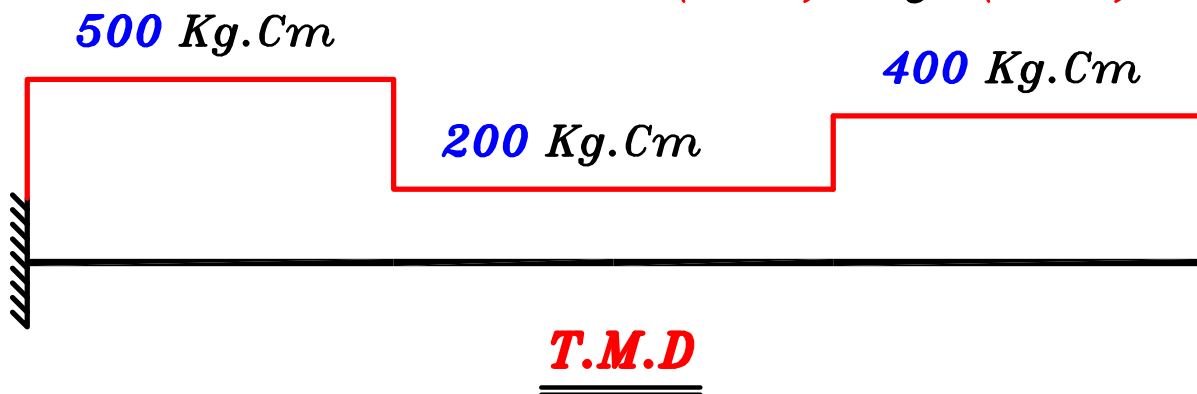
نفترض أن اتجاه الدوران عكس عقارب الساعة تكون القوة التي سنضعها مكان ال **Torsional moment** لا على و العكس صحيح .

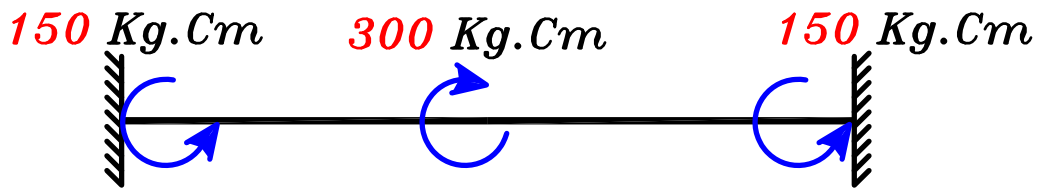
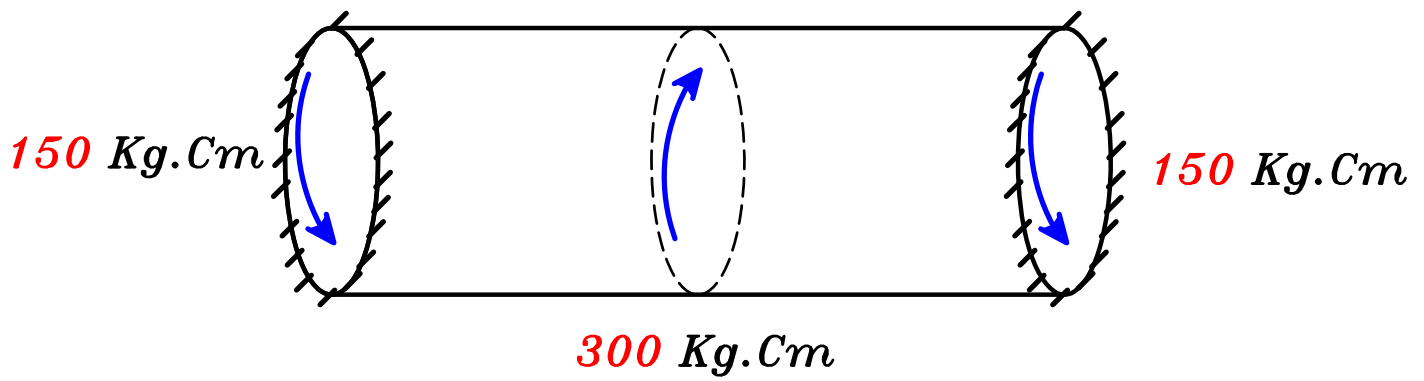


ثم نحسب ال **Reaction** لهذه الكمرة عن طريق $\Sigma Y = 0$

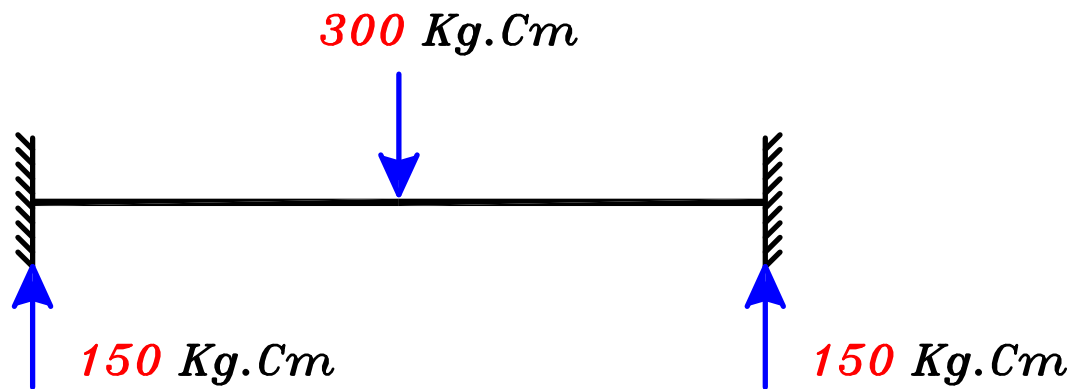


ثم نرسم ال **(T.M.D)** مثل ال **(S.F.D)**

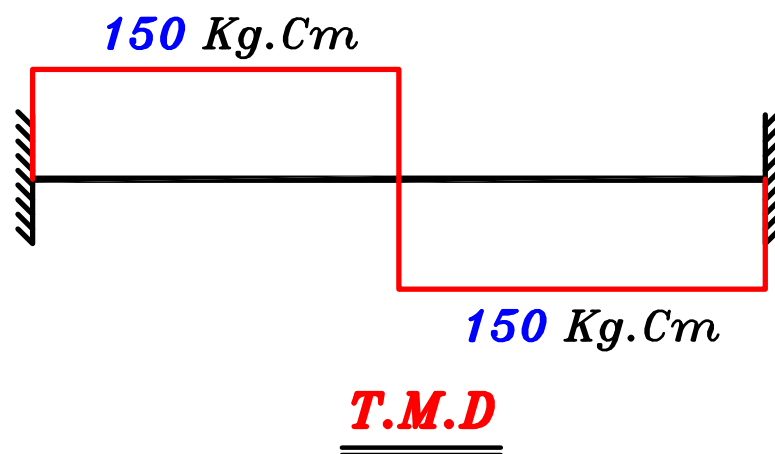




نفترض أن اتجاه الدوران عكس عقارب الساعة تكون القوة التي سنضعها مكان ال **Torsional moment** لا على و العكس صحيح .



ثم نرسم ال **(T.M.D)** مثل ال **(S.F.D)**



Example:

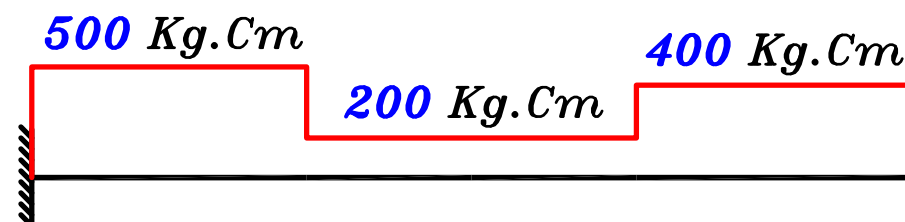
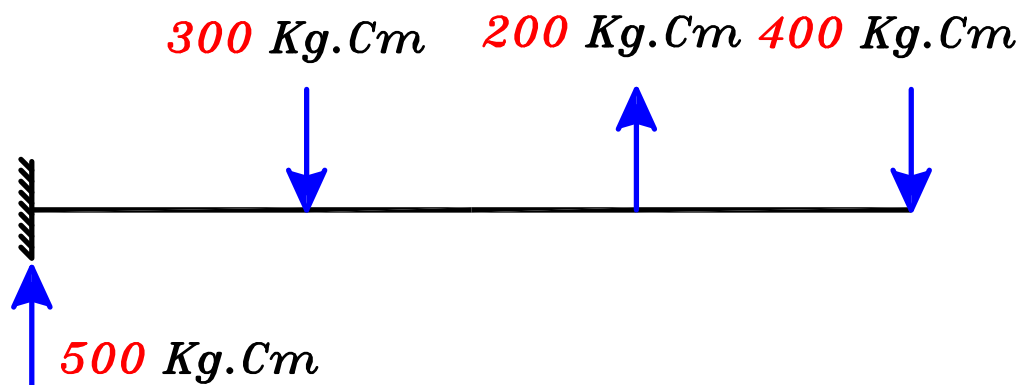
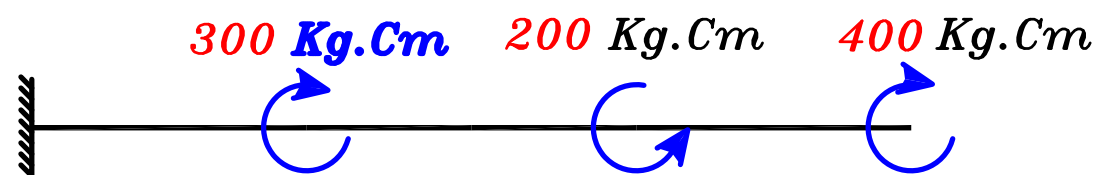
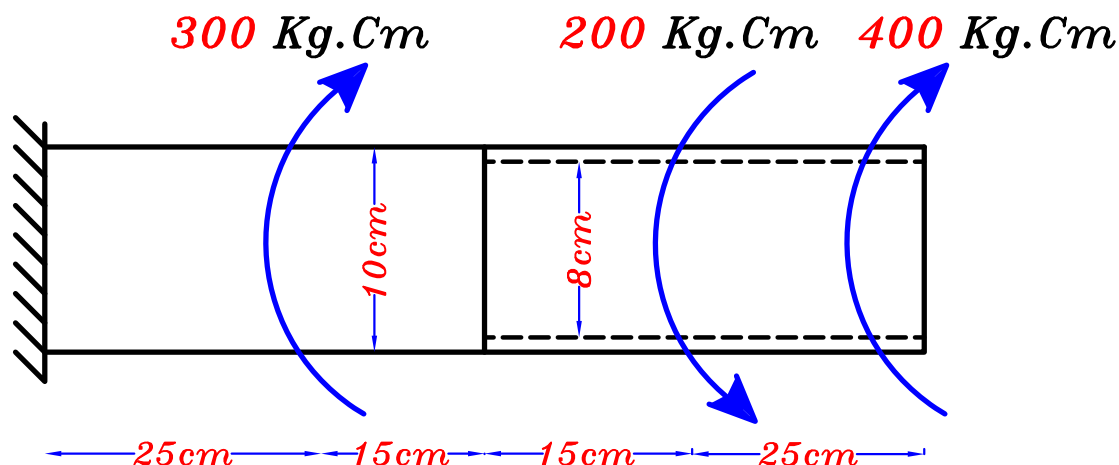
For the shown shaft with circular section it is required to :

1-Draw the T.M.D.

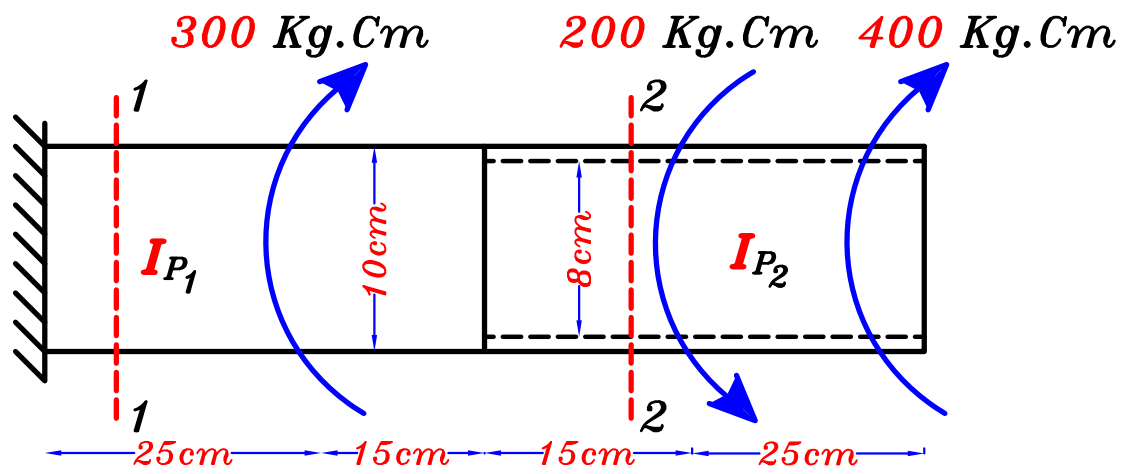
2-Calculate the maximum shear stress.

3-Draw the twisting angle diagram. ($G = 700 \text{ t} \setminus \text{Cm}^2$)

4-Find the maximum twisting angle.



T.M.D

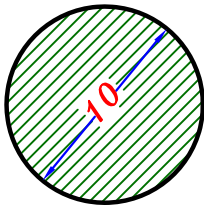


و لحساب ال *Shear stress* نحتاج الى حساب ال I_{P2} & I_{P1}

$$I_P = I_x + I_y$$

و فى حالة الدائرة $I_x = I_y$ و لذلك $I_P = 2 I_O$

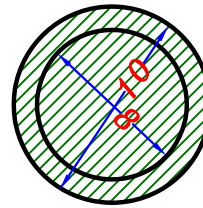
Sec 1



$$I_{P1} = 2 * \frac{\pi}{4} R^4 = 2 * \frac{\pi}{4} 5^4$$

$$= \mathbf{981.75 \text{ Cm}^4}$$

Sec 2

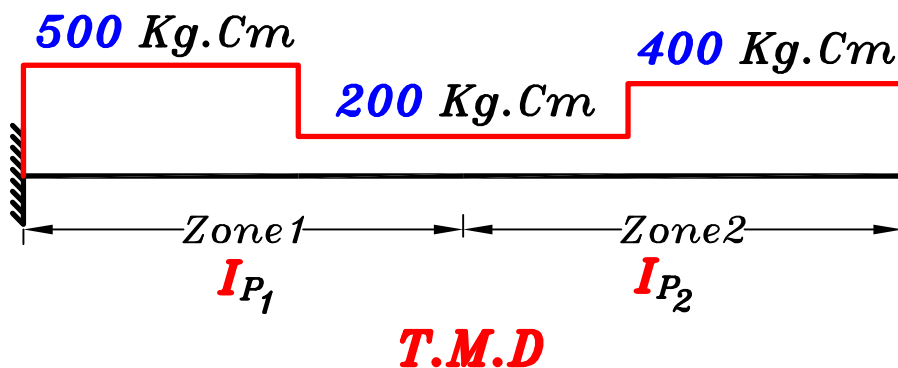


$$I_{P2} = 2 * \frac{\pi}{4} [R_o^4 - R_i^4]$$

$$= 2 * \frac{\pi}{4} [5^4 - 4^4]$$

$$= \mathbf{576.62 \text{ Cm}^4}$$

و لحساب ال *max. shear stress* من المعادلة $q = \frac{M_t}{I_P} R$ نجد أننا نحتاج الى أكبر *Torsional moment* و هذا نحصل عليه من ال *T.M.D* و أقل I_P و فى هذه المسألة نجد أن أكبر M_t ليس مع أقل I_P و بالتالى نحسب ال q مرتين و نأخذ الاكبر منهما

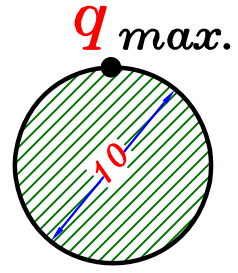


Zone 1 :

$$q_r = \frac{M_t}{I_P} r$$

أكبر M_t في Zone 1

$$q_{max.} = \frac{500 \text{ Kg.cm}}{981.75 \text{ Cm}^4} * 5 \text{ cm} = 2.54 \text{ kg} \setminus \text{Cm}^2$$

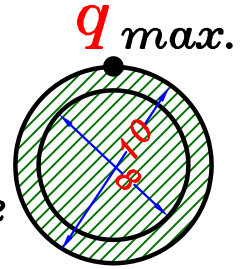


Zone 2 :

$$q_r = \frac{M_t}{I_P} r$$

أكبر M_t في Zone 2

$$q_{max.} = \frac{400 \text{ Kg.cm}}{576.62 \text{ Cm}^4} * 5 \text{ cm} = 3.45 \text{ kg} \setminus \text{Cm}^2$$



$$q_{max.} = 3.45 \text{ kg} \setminus \text{Cm}^2$$

For twisting angle diagram

هو عبارة عن *diagram* يوضح قيمة ال *Twisting angle* عند كل نقطة من نقاط الكمرة و خطوات رسمه كالتالى .

١- نقسم الكمرة الى أجزاء عند كل تغير فى ال *Section* أو تغير فى ال *T.M.D* و نحسب ال θ لكل جزء .

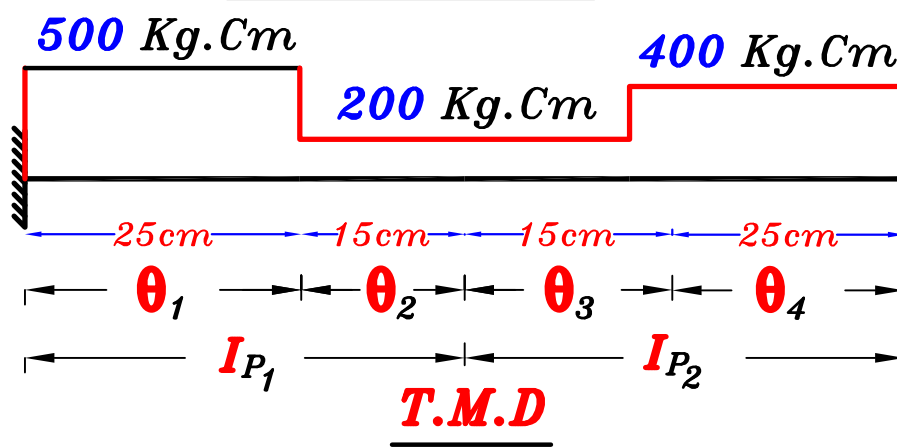
٢- نبدأ من النقطة الثابتة أى التى لا يحدث عندها دوران و نرسم ال θ لاول جزء حسب اختيارنا فوق الكمرة أو تحتها و غالبا تكون النقطة الثابتة *Fixation* .

٣- بالنسبة للجزء الثانى نزود ال θ له على الجزء الاول اذا كان ال *T.M.D* فى هذا الجزء له نفس اشارة الجزء الاول و نطرح ال θ من ال θ الاولى اذا كان ال *T.M.D* فى هذا الجزء له عكس اشارة الجزء الاول .

٤- نكمل باقى الاجزاء كما فى الخطوة الثالثة .

١- نقسم الكمرة الى أجزاء عند كل تغير فى ال **Section** أو تغير فى ال **T.M.D** و نحسب ال θ لكل جزء .

$$\theta = \frac{M_t}{I_P} * \frac{L}{G}$$



$$\theta = \frac{M_t}{I_P} * \frac{L}{G}$$

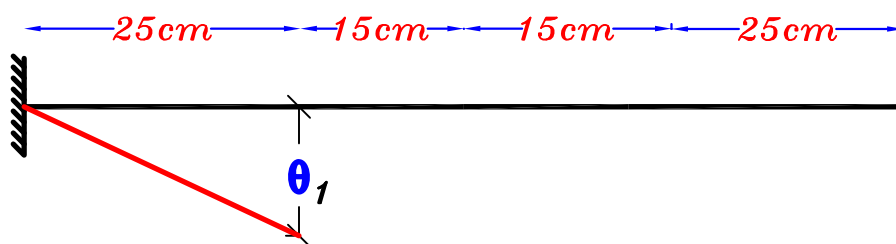
$$\theta_1 = \frac{0.5 \text{ t.cm}}{981.75 \text{ cm}^4} * \frac{25 \text{ cm}}{700 \text{ t} \setminus \text{Cm}^2} = 0.0000181 \text{ rad.}$$

$$\theta_2 = \frac{0.2 \text{ t.cm}}{981.75 \text{ cm}^4} * \frac{15 \text{ cm}}{700 \text{ t} \setminus \text{Cm}^2} = 0.0000043 \text{ rad.}$$

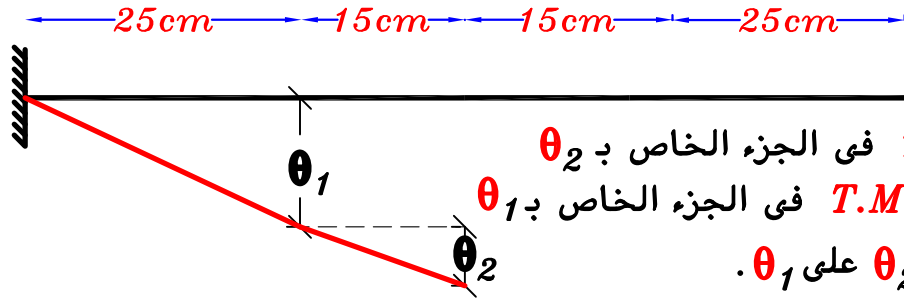
$$\theta_3 = \frac{0.2 \text{ t.cm}}{576.62 \text{ cm}^4} * \frac{15 \text{ cm}}{700 \text{ t} \setminus \text{Cm}^2} = 0.0000074 \text{ rad.}$$

$$\theta_4 = \frac{0.4 \text{ t.cm}}{576.62 \text{ cm}^4} * \frac{25 \text{ cm}}{700 \text{ t} \setminus \text{Cm}^2} = 0.000024 \text{ rad.}$$

٢- نبدأ من النقطة الثابتة أى التى لا يحدث عندها دوران و نرسم ال θ لاول جزء حسب اختيارنا فوق الكمرة أو تحتها .

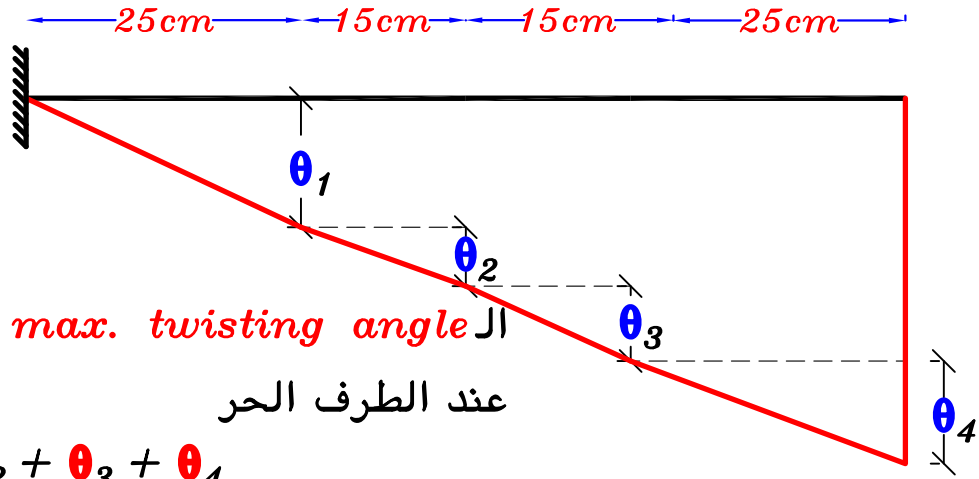


٣- بالنسبة للجزء الثانى نزود ال θ له على الجزء الاول اذا كان ال $T.M.D$ فى هذا الجزء له نفس اشارة الجزء الاول و نطرح ال θ من ال θ الاولى اذا كان ال $T.M.D$ فى هذا الجزء له عكس اشارة الجزء الاول .



اشارة ال $T.M.D$ فى الجزء الخاص بـ θ_2 مثل اشارة ال $T.M.D$ فى الجزء الخاص بـ θ_1 و بالتالى نجمع θ_2 على θ_1 .

٤- نكمل باقى الاجزاء كما فى الخطوة الثالثة .



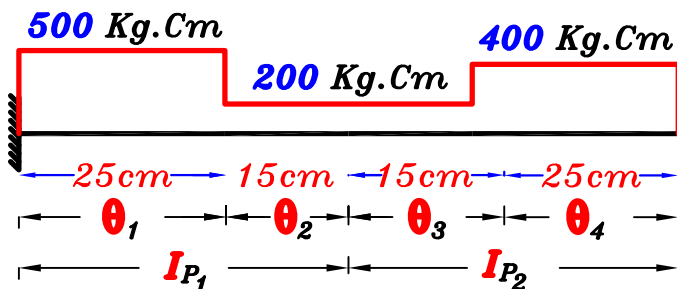
ال $max. twisting angle$ فى نهاية الكمرة عند الطرف الحر

$$\theta_{max.} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0.000269 \text{ rad.}$$

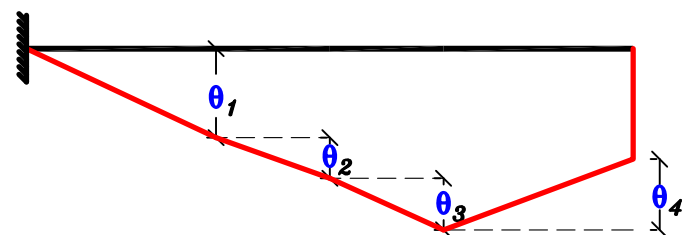
اشارة ال $T.M.D$ فى الجزء الخاص بـ θ_3 مثل اشارة ال $T.M.D$ فى الجزء الخاص بـ θ_1 و بالتالى نجمع θ_3 على θ_2 و θ_1 .

اشارة ال $T.M.D$ فى الجزء الخاص بـ θ_4 مثل اشارة ال $T.M.D$ فى الجزء الخاص بـ θ_1 و بالتالى نجمع θ_4 على θ_3 و θ_2 و θ_1 .

فى حالة مثلا اذا كانت اشارة ال $T.M.D$ فى الجزء الخاص بـ θ_4 عكس الجزء الخاص بـ θ_1 كالتالى نطرح قيمة θ_4 من θ_3 و θ_2 و θ_1 .



$$\theta_{max.} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$



Example:

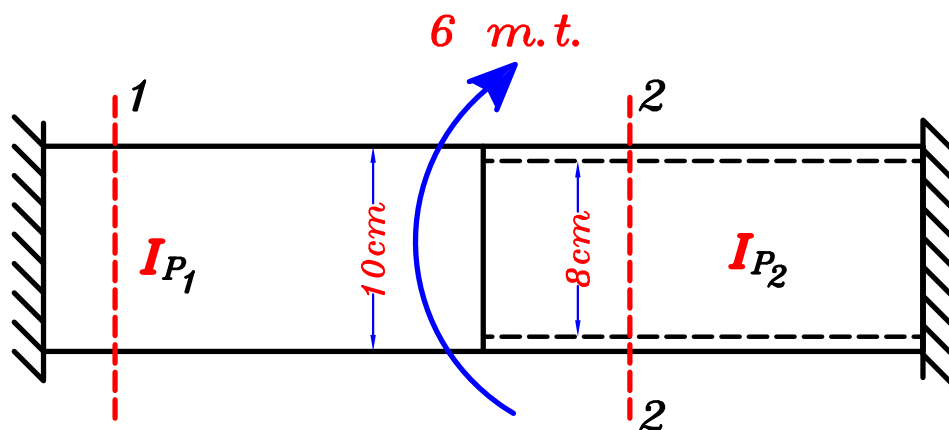
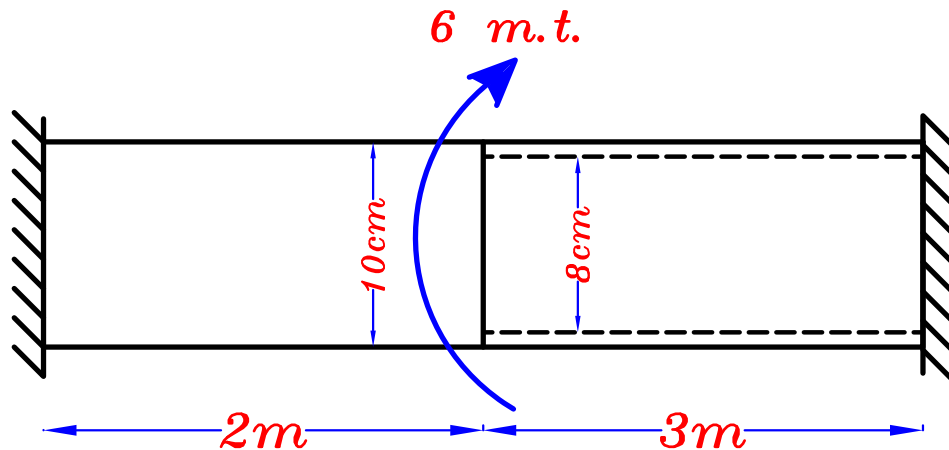
For the shown shaft with circular section it is required to :

1-Draw the T.M.D.

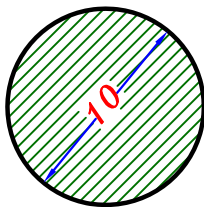
2-Calculate the maximum shear stress.

3-Draw the twisting angle diagram. ($G = 700 \text{ t/Cm}^2$)

4-Find the maximum twisting angle.

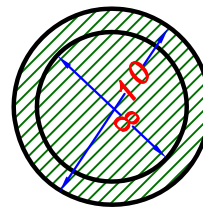


Sec 1

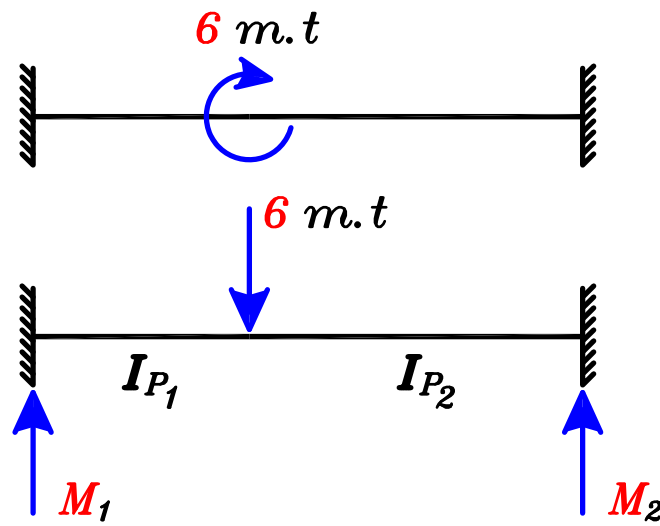


$$I_{P1} = 2 * \frac{\pi}{4} R^4 = 2 * \frac{\pi}{4} 5^4$$
$$= \mathbf{981.75 \text{ Cm}^4}$$

Sec 2



$$I_{P2} = 2 * \frac{\pi}{4} [R_o^4 - R_i^4]$$
$$= 2 * \frac{\pi}{4} [5^4 - 4^4]$$
$$= \mathbf{576.62 \text{ Cm}^4}$$

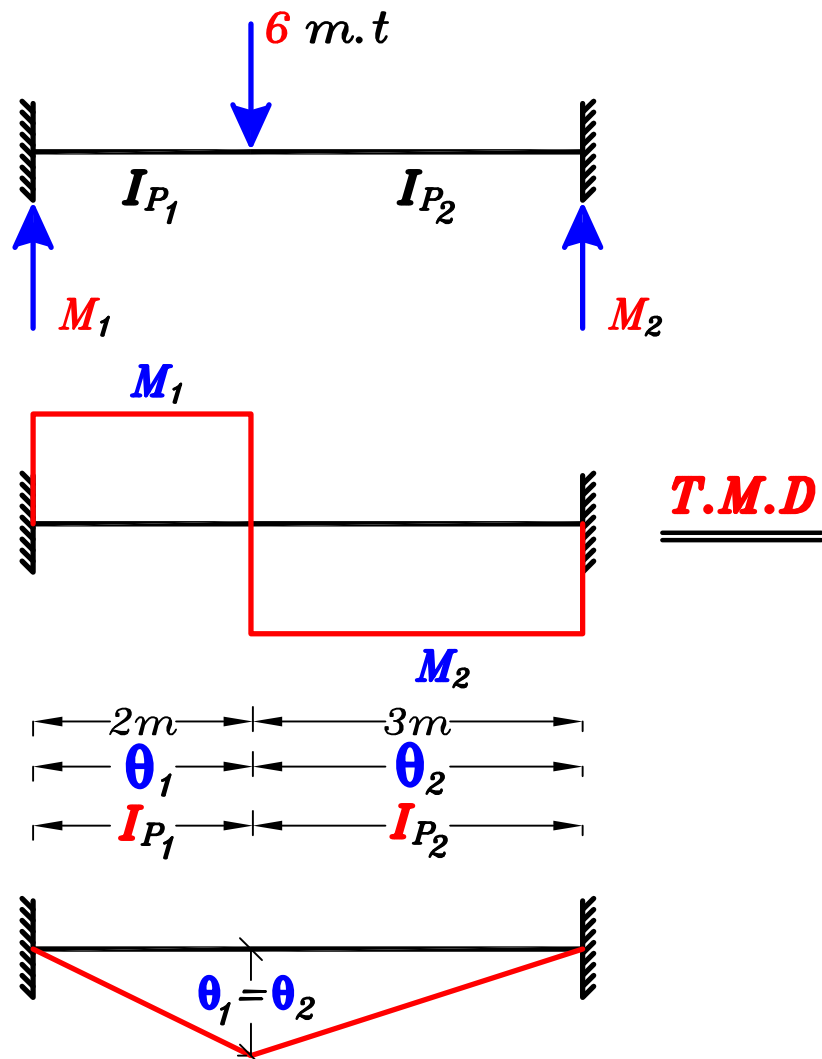


خذ بالك الكمرة غير متماثلة لاختلاف ال *Section*
 و لذلك لا يمكن أن نقول $M_1 + M_2 = \frac{\Sigma \text{Load}}{2}$ كما أن ال *Load* ليس في المنتصف

$$\Sigma Y = 0$$

$$M_1 + M_2 = 6 \implies \text{Eq.1}$$

For twisting angle diagram



Twisting angle diagram

$$\theta = \frac{M_t}{I_P} * \frac{L}{G}$$

$$\theta_1 = \frac{M_1}{981.75 \text{ cm}^4} * \frac{200 \text{ cm}}{700 \text{ t} \setminus \text{Cm}^2}$$

$$\theta_2 = \frac{M_2}{576.62 \text{ cm}^4} * \frac{300 \text{ cm}}{700 \text{ t} \setminus \text{Cm}^2}$$

$$\theta_1 = \theta_2$$

$$\frac{M_1}{981.75 \text{ cm}^4} * \frac{200 \text{ cm}}{700 \text{ t} \setminus \text{Cm}^2} = \frac{M_2}{576.62 \text{ cm}^4} * \frac{300 \text{ cm}}{700 \text{ t} \setminus \text{Cm}^2}$$

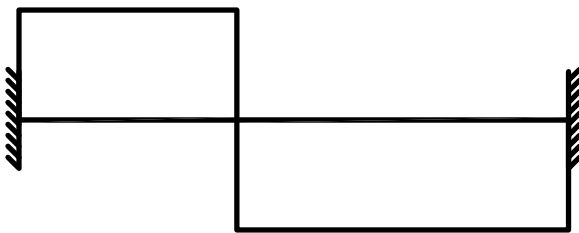
$$M_1 = 2.54 M_2 \implies \text{Eq.2}$$

Solving the two equations

$$M_1 = 4.305 \text{ m.t}$$

$$M_2 = 1.695 \text{ m.t}$$

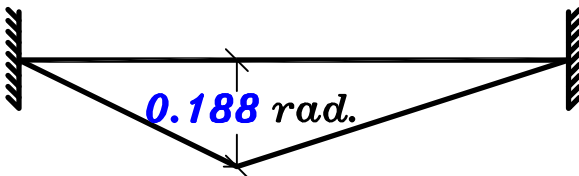
4.305 m.t



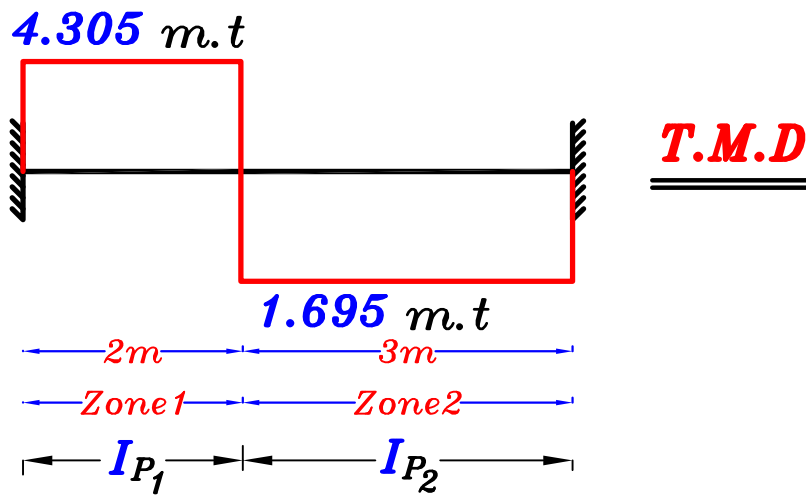
T.M.D

1.695 m.t

$$\begin{aligned} \theta_1 = \theta_2 &= \frac{M_1}{981.75 \text{ cm}^4} * \frac{200 \text{ cm}}{700 \text{ t} \setminus \text{Cm}^2} \\ &= \frac{430.5 \text{ cm.t}}{981.75 \text{ cm}^4} * \frac{200 \text{ cm}}{700 \text{ t} \setminus \text{Cm}^2} = 0.188 \text{ rad.} \end{aligned}$$



Twisting angle diagram

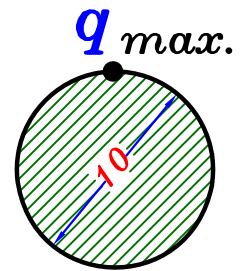


Zone 1 :

$$q_r = \frac{M_t}{I_P} r$$

أكبر M_t في Zone 1

$$q_{max.} = \frac{430.5 \text{ kg.cm}}{981.75 \text{ Cm}^4} * 5 \text{ cm} = 2.19 \text{ kg/Cm}^2$$

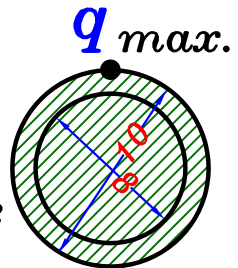


Zone 2 :

$$q_r = \frac{M_t}{I_P} r$$

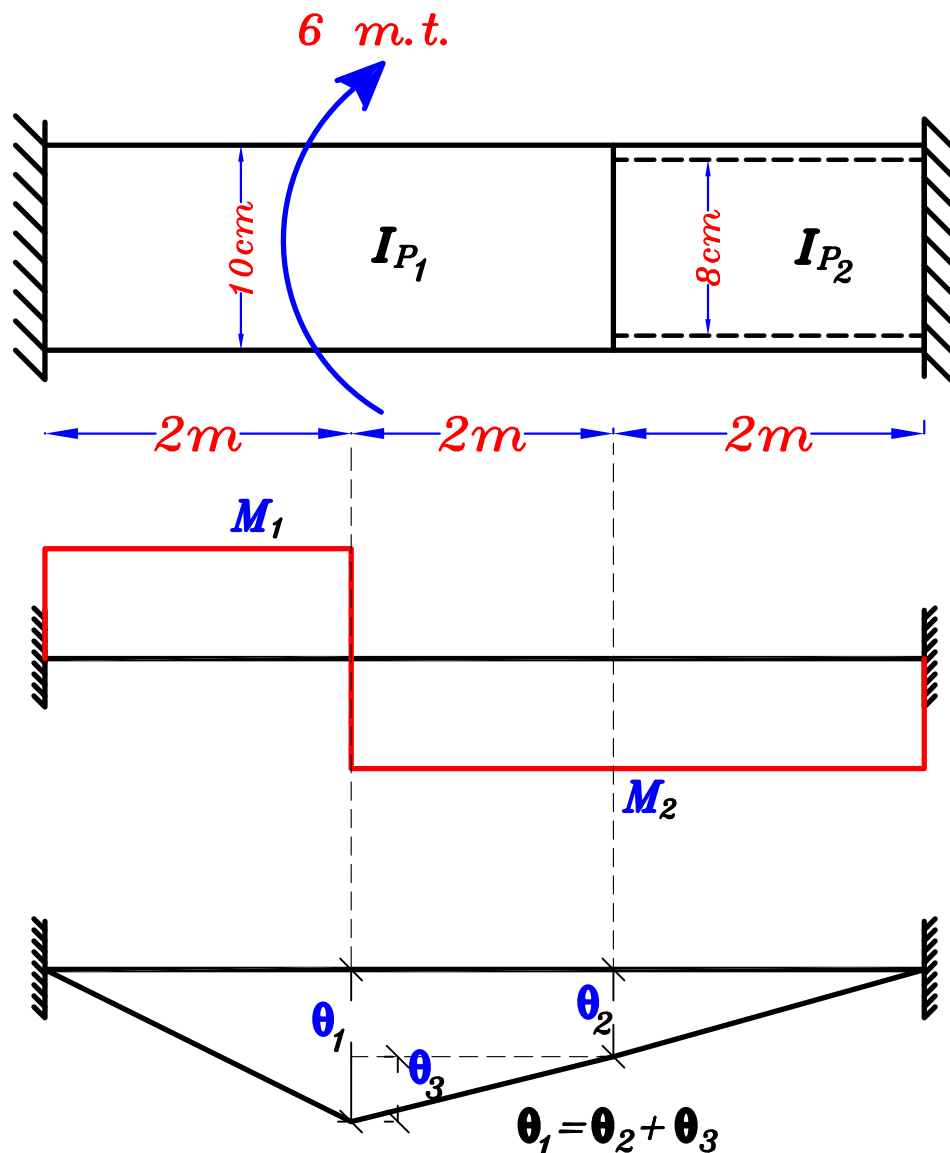
أكبر M_t في Zone 2

$$q_{max.} = \frac{169.5 \text{ kg.cm}}{576.62 \text{ Cm}^4} * 5 \text{ cm} = 1.46 \text{ kg/Cm}^2$$



$$q_{max.} = 2.19 \text{ kg/Cm}^2$$

فى نفس المسألة السابقة اذا حدث تغير فى القطاع عند موضع آخر غير تغير ال **T.M.D**.



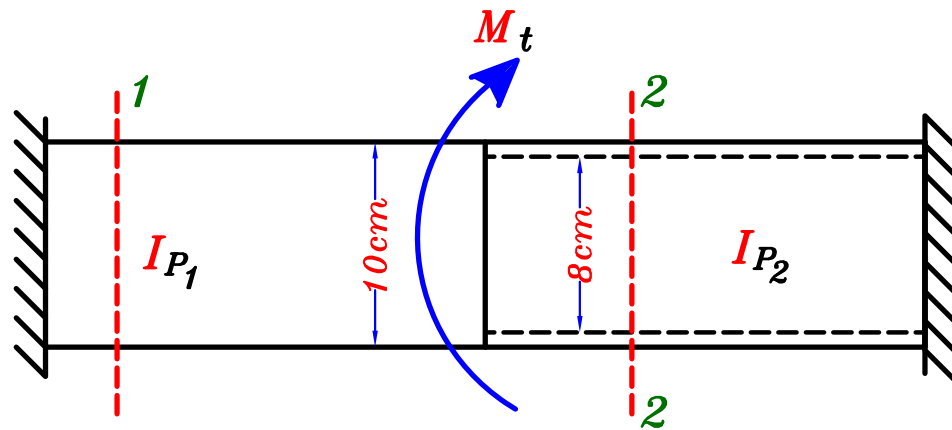
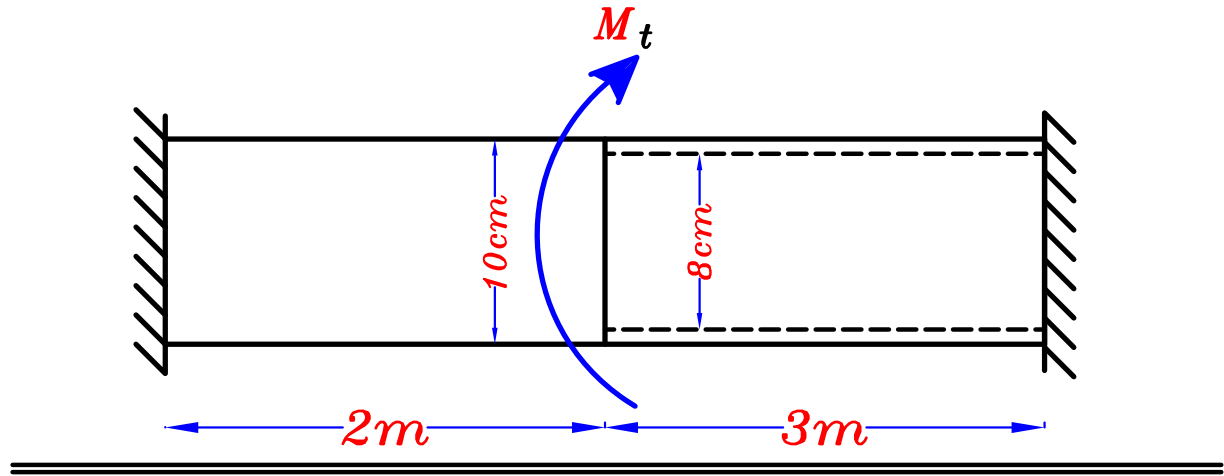
Twisting angle diagram

$$\theta_1 = \theta_2 + \theta_3$$

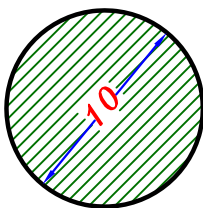
$$\frac{M_1}{I_{P_1}} * \frac{200}{G} = \frac{M_2}{I_{P_2}} * \frac{200}{G} + \frac{M_2}{I_{P_1}} * \frac{200}{G}$$

Example:

For the shown shaft with circular section it is required to find the maximum value of (M_t) so that the shear stress doesn't exceed 0.8 t/cm^2 .

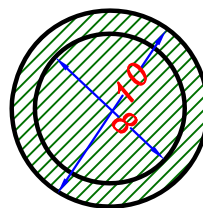


Sec 1

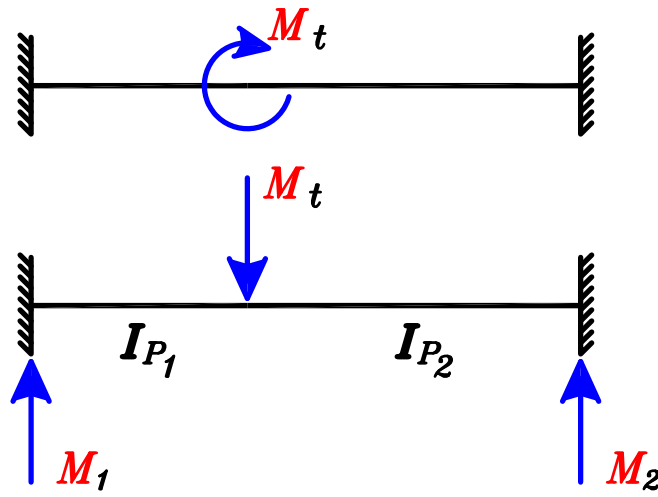


$$I_{P_1} = 2 * \frac{\pi}{4} R^4 = 2 * \frac{\pi}{4} 5^4$$
$$= \mathbf{981.75 \text{ Cm}^4}$$

Sec 2



$$I_{P_2} = 2 * \frac{\pi}{4} [R_o^4 - R_i^4]$$
$$= 2 * \frac{\pi}{4} [5^4 - 4^4]$$
$$= \mathbf{576.62 \text{ Cm}^4}$$



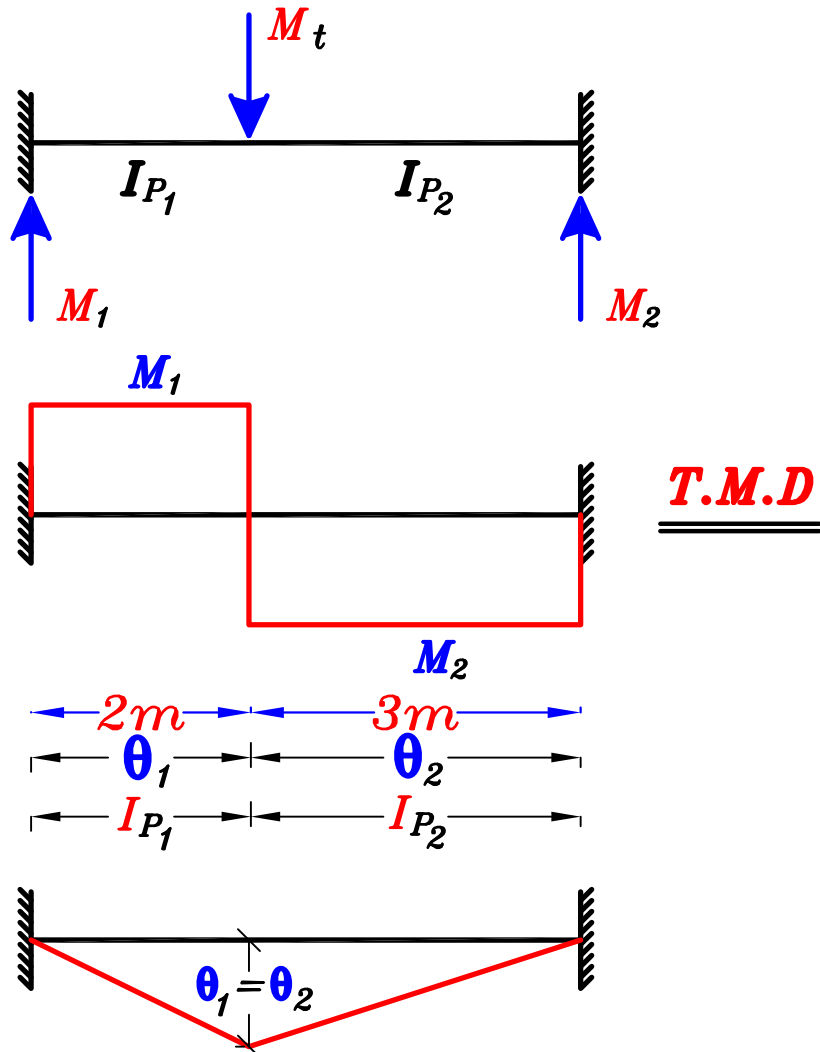
خذ بالك الكمرة غير متماثلة لاختلاف ال *Section*

$$\Sigma Y = 0$$

و لذلك لا يمكن أن نقول $M_1 + M_2 = \frac{\Sigma \text{Load}}{2}$ كما أن ال *Load* ليس في المنتصف

$$M_1 + M_2 = M_t \implies \text{Eq.1}$$

For twisting angle diagram

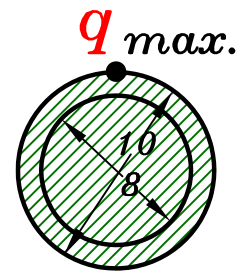


Twisting angle diagram

Zone 2 :

$$q_r = \frac{M_t}{I_P} r$$

أكبر M_t في Zone 2
 $m.t$



$$q_{max.} = \frac{0.2825 M_t * 100 \text{ t.cm}}{576.62 \text{ Cm}^4} * 5 \text{ cm} = 0.80 \text{ t} \setminus \text{Cm}^2$$

$$M_t = 3.283 \text{ m.t}$$

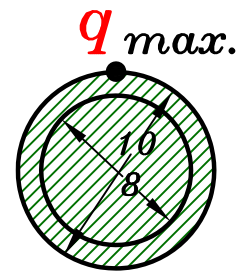
نأخذ الاصغر من القيمتين

$$M_t = 2.189 \text{ m.t}$$

Zone 2 :

$$q_r = \frac{M_t}{I_P} r$$

أكبر M_t في Zone 2
m.t



$$q_{max.} = \frac{0.2825 M_t * 100 \text{ t.cm}}{576.62 \text{ Cm}^4} * 5 \text{ cm} = 0.80 \text{ t} \setminus \text{Cm}^2$$

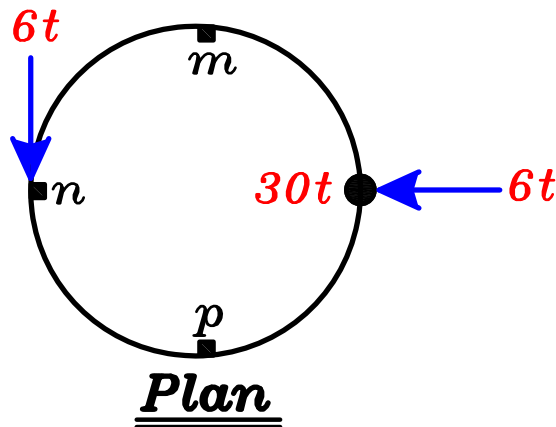
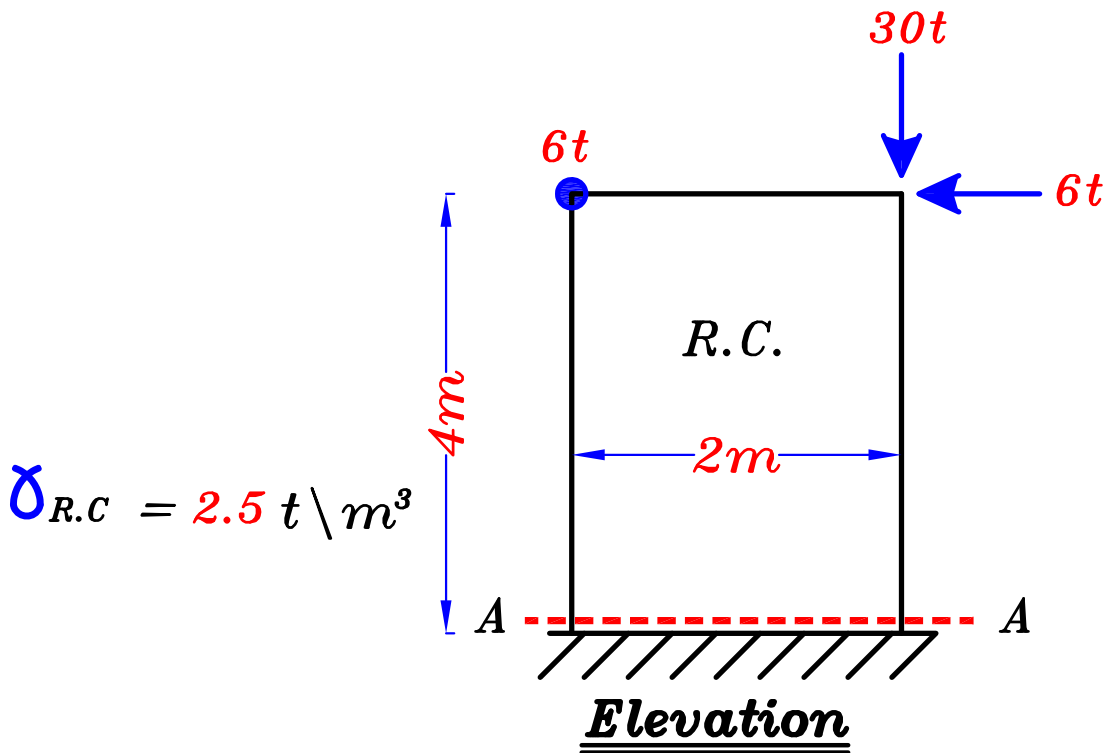
$$M_t = 3.283 \text{ m.t}$$

نأخذ الاصغر من القيمتين

$$M_t = 2.189 \text{ m.t}$$

Example:

For the shown R.C. pier which subjected to the shown loads its required to find the straining actions at sec A-A and find the shear stresses at points (m , n and p) at sec A-A .



ال **Shear stresses** تنتج من ثلاثة **Straining actions** و هم Q_x & Q_y & M_t و لذلك فى هذه المسألة سوف نحسب ال **Straining actions** أولاً حتى نحدد ال **Straining actions** التى تسبب ال **Shear stresses** .

Sec A-A

Straining actions

$$\# \text{ Weight} = \gamma_{R.C} * V$$

$$= 2.5 \text{ t/m}^3 * \frac{\pi}{4} 2^2 * 4$$

$$= 31.416 \text{ t}$$

$$\# N = 31.416 + 30 = 61.416 \text{ t (Comp.)}$$

$$\# Q_x = 6 \text{ t} \leftarrow$$

$$\# Q_y = 6 \text{ t} \downarrow$$

$$\# M_x = 6 * 4 = 24 \text{ m.t} \downarrow$$

$$\# M_y = 30 * 1 - 6 * 4 = 6 \text{ m.t} \rightarrow$$

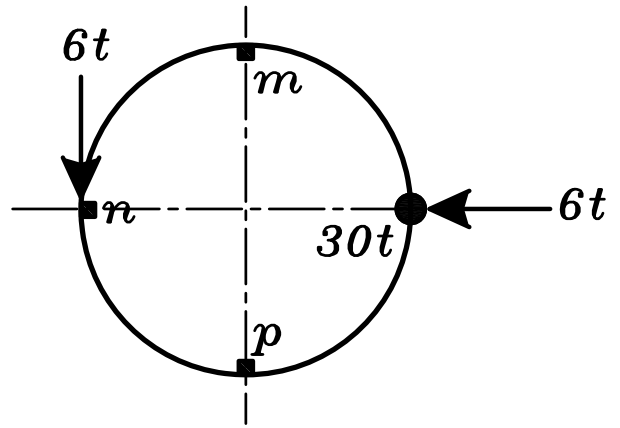
$$\# M_t = 6 * 1 = 6 \text{ m.t} \curvearrowright$$

Properties of area

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} 2^2 = 3.14 \text{ m}^2$$

$$I = \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{\pi}{4} 1^4 = 0.785 \text{ m}^4$$

$$I_P = 2 * I = 1.57 \text{ m}^4$$



ال *Shear stresses* تنتج من ثلاثة *Straining actions* و هم Q_x & Q_y & M_t و الثلاثة موجودين فى هذا المثال و لذلك سوف نجمع ال *Shear stresses* عند كل نقطة المحسوبة نتيجة ال Q_x & Q_y & M_t

$$q_r = \frac{M_t}{I_P} r$$

ال *Shear stresses* نتيجة M_t عند أى نقطة على بعد r من مركز الدائرة و ال *maximum* يكون على

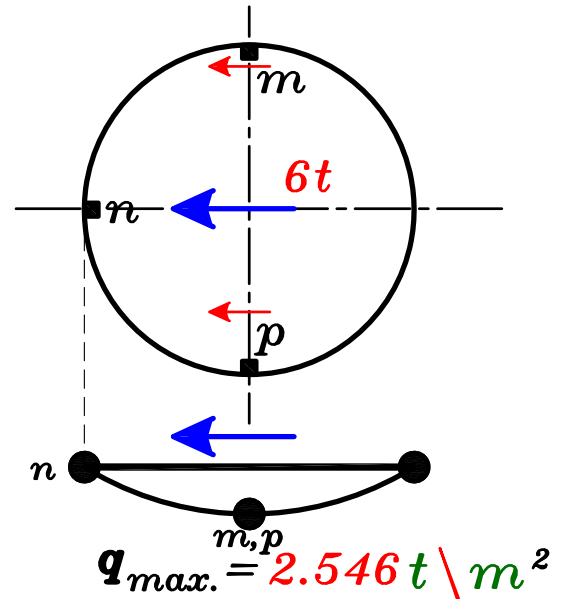
$$q = \frac{4 Q}{3 A}$$

ال *Shear stresses* نتيجة Q_x Or Q_y و هذا هو ال *maximum* و يكون عند مركز الدائرة

Shear stress due to (Q_x)

$$q = \frac{4Q}{3A}$$

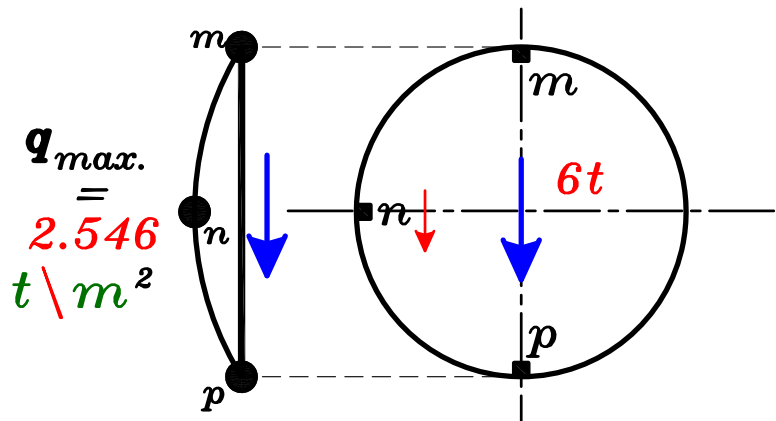
$$q_{max.} = \frac{4}{3} * \frac{6t}{3.14 m^2} = 2.546 t \setminus m^2$$



Shear stress due to (Q_y)

$$q = \frac{4Q}{3A}$$

$$q_{max.} = \frac{4}{3} * \frac{6t}{3.14 m^2} = 2.546 t \setminus m^2$$

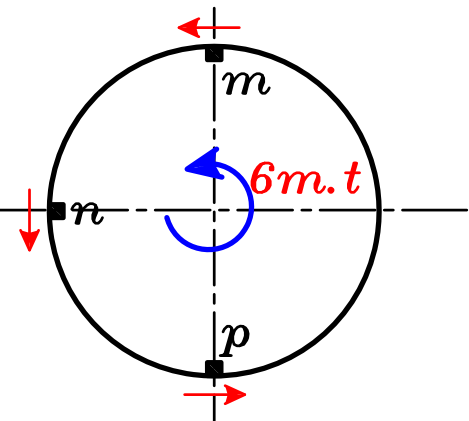


Shear stress due to (M_t)

$$q_r = \frac{M_t}{I_P} r$$

$$q_{max.} = \frac{6 m.t}{1.57 m^4} * 1 m = 3.82 t \setminus m^2$$

و لمعرفة اتجاه ال **Shear stresses** نتيجة ال M_t نرسم **Tangent** للدائرة عند النقطة و يكون اتجاه دوران ال **Tangent** حول مركز الدائرة في نفس اتجاه ال M_t هو اتجاه ال **Stress**



For point (n)

لان نقطة (n) تقع على طرف الدائرة بالنسبة لـ Q_x $q_x = 0$

لان نقطة (n) تقع في مركز الدائرة بالنسبة لـ Q_y $q_y = 2.546 t \setminus m^2 \downarrow$

لان نقطة (n) تقع على طرف الدائرة بالنسبة لـ M_t $q_t = 3.82 t \setminus m^2 \downarrow$

$$q = 2.546 + 3.82 = 6.366 t \setminus m^2 \downarrow$$

For point (m)

لان نقطة (m) تقع في مركز الدائرة بالنسبة لـ Q_x $q_x = 2.546 t \setminus m^2 \leftarrow$

لان نقطة (m) تقع على طرف الدائرة بالنسبة لـ Q_y $q_y = 0$

لان نقطة (m) تقع على طرف الدائرة بالنسبة لـ M_t $q_t = 3.82 t \setminus m^2 \leftarrow$

$$q = 2.546 + 3.82 = 6.366 t \setminus m^2 \leftarrow$$

For point (p)

لان نقطة (m) تقع في مركز الدائرة بالنسبة لـ Q_x $q_x = 2.546 t \setminus m^2 \leftarrow$

لان نقطة (m) تقع على طرف الدائرة بالنسبة لـ Q_y $q_y = 0$

لان نقطة (m) تقع على طرف الدائرة بالنسبة لـ M_t $q_t = 3.82 t \setminus m^2 \rightarrow$

$$q = 3.82 - 2.546 = 1.274 t \setminus m^2 \rightarrow$$

Other Types of Sections

درسنا ال **Shear stresses** نتيجة ال **Torsional moment** على القطاعات الدائرية و الان ندرس باقى القطاعات و المطلوب معرفته كيفية حساب ال **Shear stresses** و ال **Twisting angle** لكل من القطاعات التالية

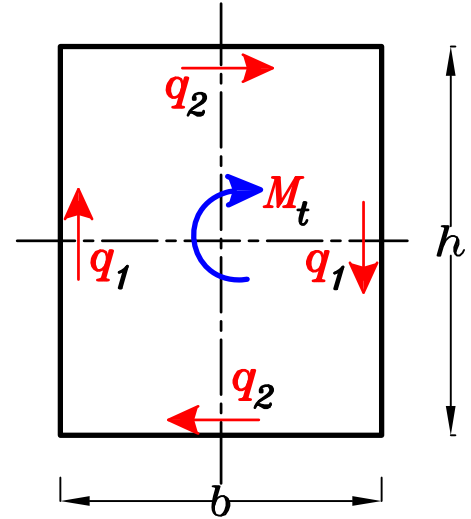
حفظ

٢ - المستطيل (Rectangle)

$$h > b$$

$$q_1 = \frac{(3 + 1.8 \frac{b}{h}) M_t}{h b^2} = q_{max.}$$

$$q_2 = q_1 * \frac{b}{h}$$



و من الممكن الحساب بطريقة أخرى حيث يعطى فى المسألة الجدول التالى

$\frac{h}{b}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
β	✓	✓	✓	✓	✓	✓
α	✓	✓	✓	✓	✓	✓

و هو علاقة بين ال $\frac{h}{b}$ و ال β و ال α هما **factors** موجودين فى معادلات ال **Shear stresses** و ال **Twisting angle**

$$q_{max.} = \frac{M_t}{\alpha h b^2}$$

$$\theta = \frac{M_t}{\beta h b^3} * \frac{L}{G}$$

$$\alpha = \frac{1}{(3 + 1.8 \frac{b}{h})}$$

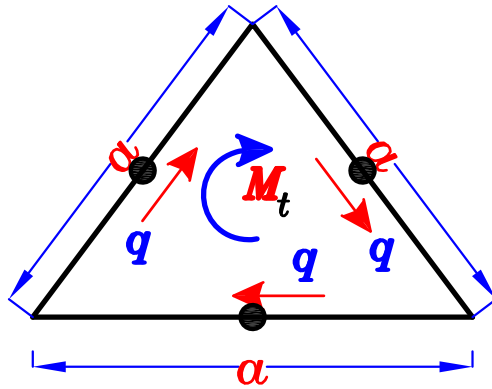


٣- المثلث المتساوي الاضلاع (Triangle)

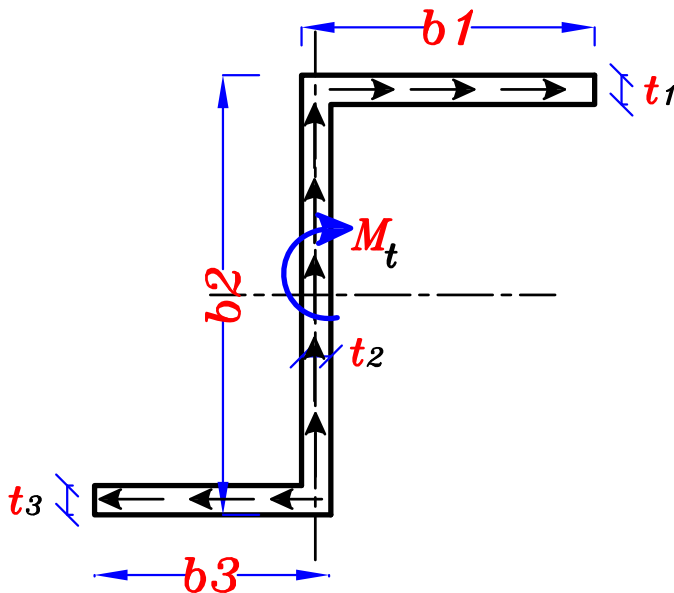
$$q_{max.} = \frac{20M_t}{a^3}$$

$$\theta = \frac{46.2 * M_t}{a^4} * \frac{L}{G}$$

وال $q_{max.}$ موجود في منتصف كل ضلع .



٤- القطاعات ذات التخانة الصغيرة المفتوحة (Open thin walled sections)



$$q = \frac{M_t * t}{\frac{J}{3} \sum b t^3}$$

$$\theta = \frac{M_t}{\frac{J}{3} \sum b t^3} * \frac{L}{G}$$

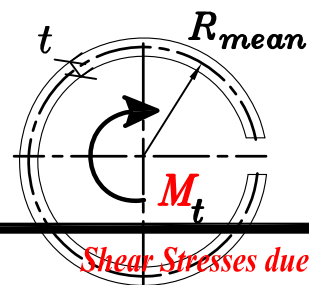
$$q_{max.} = \frac{M_t * t_{max.}}{\frac{J}{3} \sum b t^3}$$

$J = \text{Shape factor} = 1$

$$\sum b t^3 = b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3 + b_3 t_3^3$$

في حالة الدائرة

$$\begin{aligned} \sum b t^3 &= \text{mean perimeter} * t^3 \\ &= 2 \pi R_{mean} * t^3 \end{aligned}$$



Shear Stresses due to Torsion



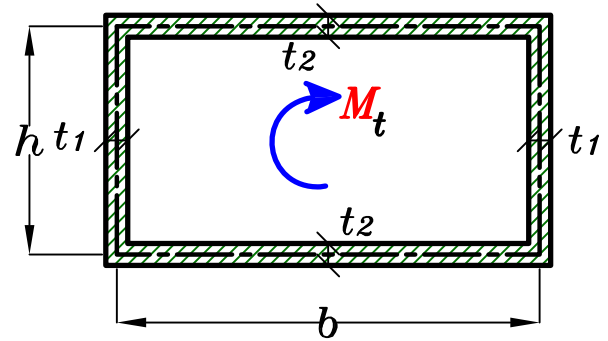
٥- القطاعات ذات التآنة الصغيرة المغلقة (Closed thin walled sections)

$$q = \frac{M_t}{2 A_{mean} t}$$

$$q_{max.} = \frac{M_t}{2 A_{mean} t_{min.}}$$

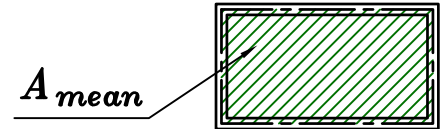
$$\theta = \frac{M_t}{46 A_{mean}^2} * \frac{L}{G} * \sum \frac{ds}{t}$$

$$\sum \frac{ds}{t} = \sum \frac{\text{طول كل جزء}}{\text{تآنة هذا الجزء}} = \frac{b_1}{t_1} + \frac{b_2}{t_2} + \frac{b_3}{t_3} + \dots$$



$A_{mean} \Rightarrow$ هي المساحة المحصورة داخل ال C.L.

$$A_{mean} = b * h$$

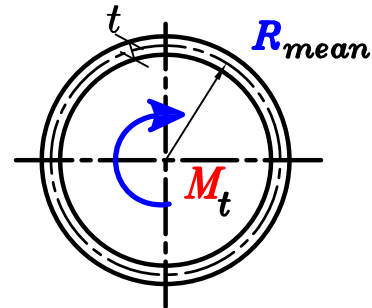


في حالة الدائرة

$$q = \frac{M_t}{2 A_{mean} t}$$

$$A_{mean} = \pi R_{mean}^2$$

$$\sum \frac{ds}{t} = \frac{2\pi R_{mean}}{t}$$

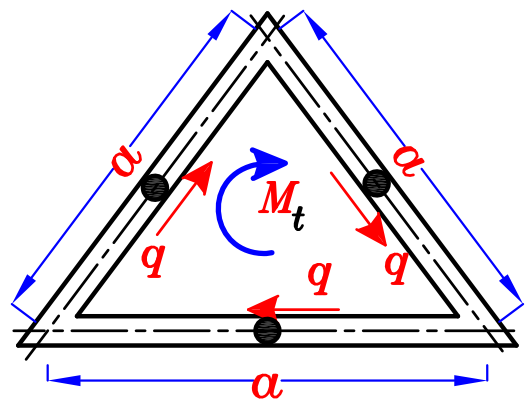


في حالة المثلث

$$q = \frac{M_t}{2 A_{mean} t}$$

$$A_{mean} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

و ال $q_{max.}$ موجود في منتصف كل ضلع .

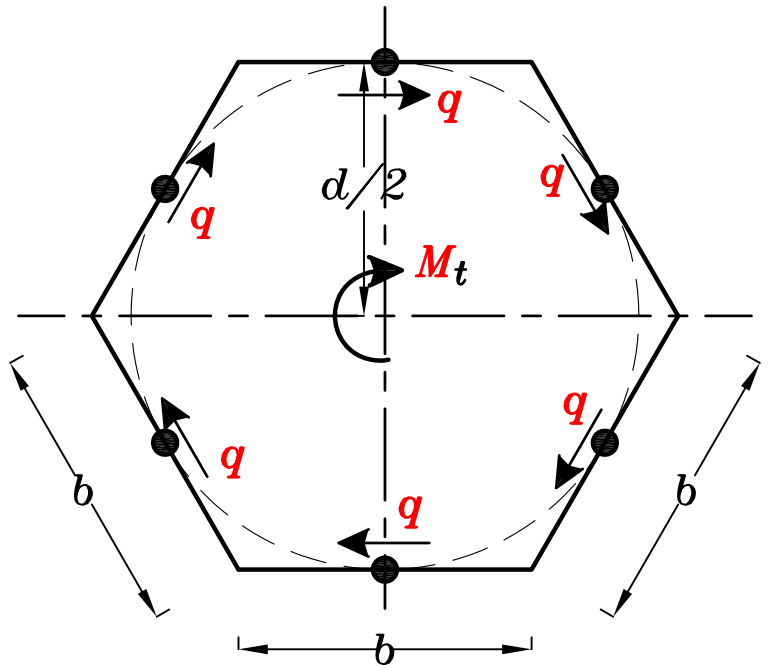


٧- الشكل السداسى المتساوى الاضلاع (Hexagon)

$$q_{max.} = \frac{M_t}{0.217 A d}$$

$$\theta = \frac{M_t}{0.133 A d^2} * \frac{L}{G}$$

و ال $q_{max.}$ موجود فى منتصف كل ضلع .

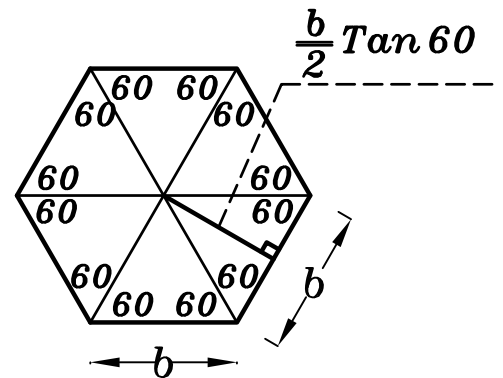


$d \Rightarrow$ قطر الدائرة التى تمس أضلاع الشكل من الداخل

$A \Rightarrow$ مساحة الشكل السداسى

و المساحة من الممكن حسابها عن طريق تقسيم الشكل الى ٦ مثلثات متساوية و حساب مساحة احدهم و ضربه فى ٦

$$A = 6 * \left[\frac{1}{2} * b * \frac{b}{2} \tan 60 \right]$$



و من الممكن حساب المساحة مباشرة من القانون التالى

معلومات عن الاشكال المنتظمة

مجموع الزوايا الداخلية = (عدد نقاط الشكل - ٢) * ١٨٠
 قيمة الزاوية الواحدة = $\frac{\text{مجموع الزوايا الداخلية}}{\text{عدد النقاط}}$

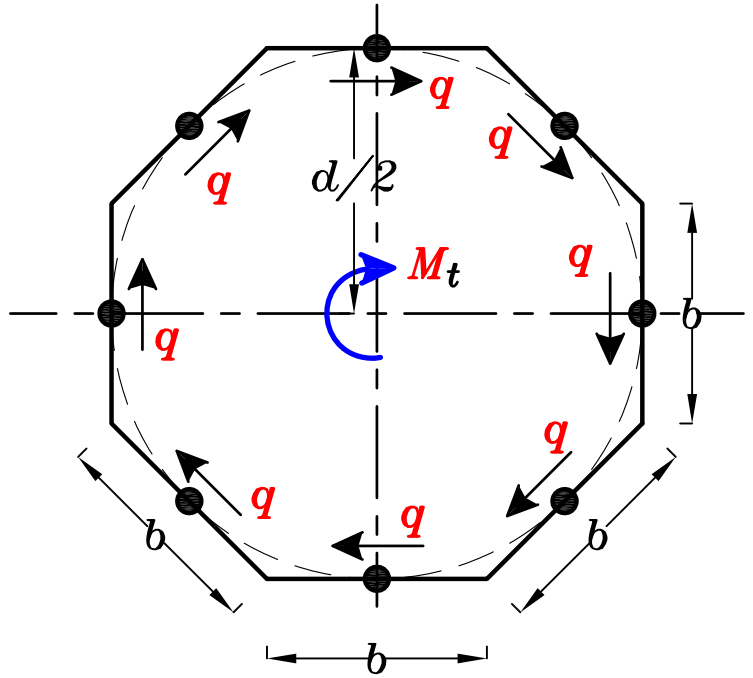
و فى حالة الشكل السداسى تكون مجموع الزوايا الداخلية = $١٨٠ * ٤ = ٧٢٠$
 و الزاوية الواحدة = $\frac{٧٢٠}{٦} = ١٢٠$

٨ - الشكل الثماني المتساوى الاضلاع

$$q_{max.} = \frac{M_t}{0.223 A d}$$

$$\theta = \frac{M_t}{0.130 A d^2} * \frac{L}{G}$$

و ال $q_{max.}$ موجود فى منتصف كل ضلع .



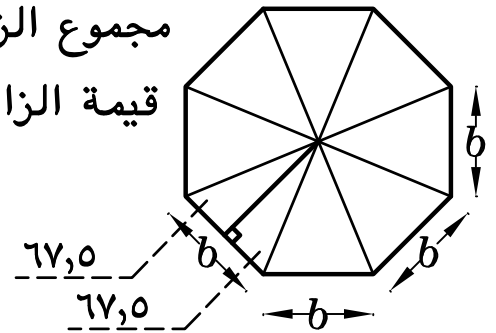
$d \Rightarrow$ قطر الدائرة التى تمس أضلاع الشكل من الداخل

$A \Rightarrow$ مساحة الشكل السداسى

و المساحة من الممكن حسابها عن طريق تقسيم الشكل الى ٨ مثلثات متساوية و حساب مساحة احدهم و ضربه فى ٨

مجموع الزوايا الداخلية = $180 * (٢ - ٨) = ١٠٨٠$

قيمة الزاوية الواحدة = $\frac{١٠٨٠}{٦} = ١٣٥$



$$A = 8 * \left[\frac{1}{2} * b * \frac{b}{2} \tan 67.5 \right]$$

$$\theta = \frac{M_t * L}{GJ}$$

دائماً

$$J = \frac{1}{3} h b^3$$

في حالة ال *Rectangle*

$$J = I_P = 2 \pi R_{mean}^3 * t$$

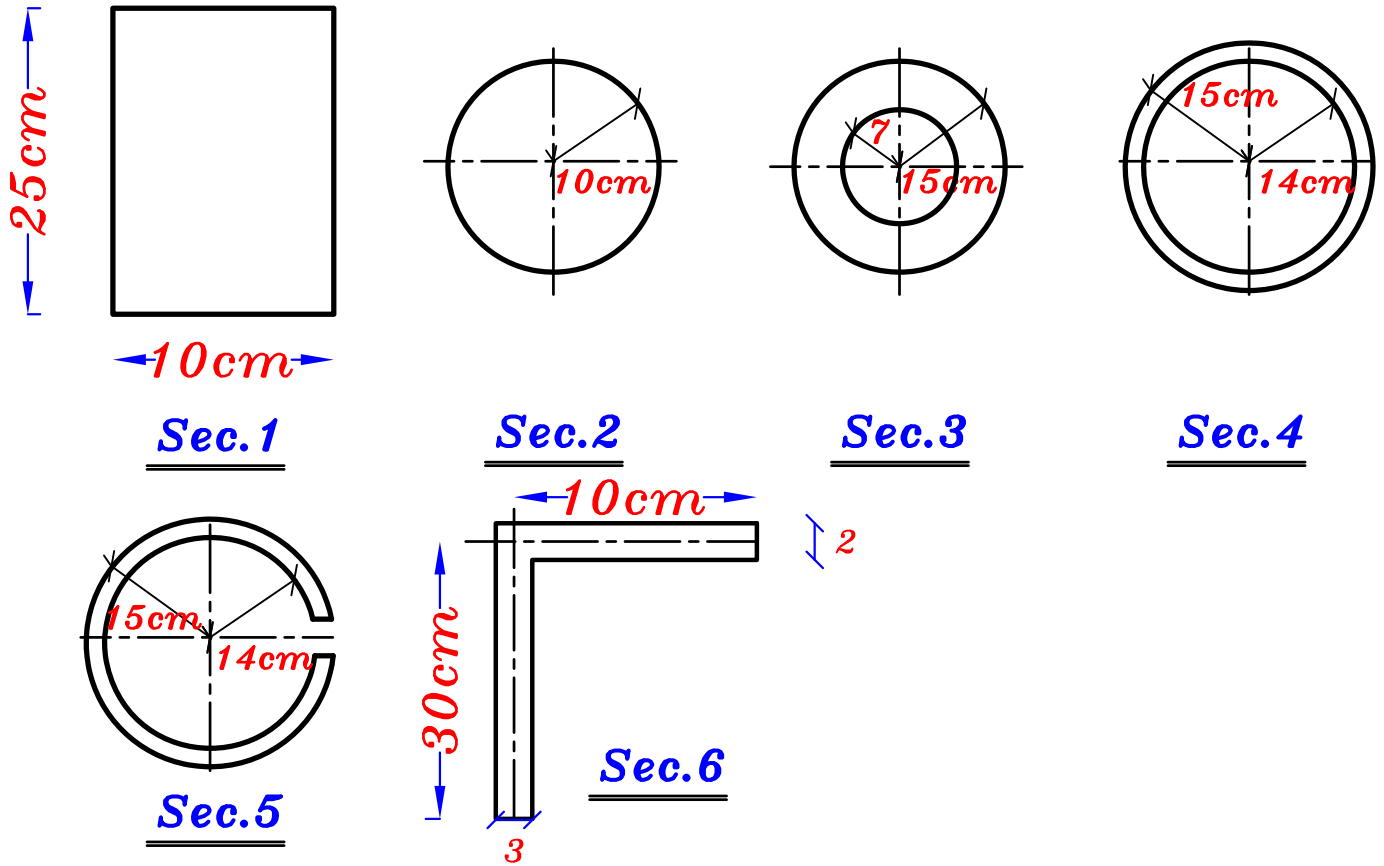
في حالة ال *thin walled circle*

$$J = I_P = \frac{\pi R^4}{2}$$

في حالة ال *Circle*

Example:

For the shown section calculate the maximum torsional moment applied so that the shear stresses don't exceed 0.8 t / cm^2 .



Sec. 1

$$q_1 = \frac{(3 + 1.8 \frac{b}{h}) M_t}{h b^2} = q_{max.}$$

$$0.80 = \frac{(3 + 1.8 \frac{10}{25}) M_t}{25 * 10^2}$$

$$M_t = 537 \text{ cm.t}$$

Sec. 2

$$q_{max.} = \frac{M_t}{I_P} R$$

$$0.80 = \frac{M_t}{2 * \frac{\pi 10^4}{4}} * 10$$

$$M_t = 1256 \text{ cm.t}$$

Sec.3

$$q_{max.} = \frac{M_t}{I_P} R$$

$$0.80 = \frac{M_t}{2 * \frac{\pi (15^4 - 7^4)}{4}} * 15$$

$$M_t = 4040 \text{ cm.t}$$

Sec.4

هذا القطاع *Thin walled section* لأن الـ *Thickness* صغير جدا حيث انه $t = 15 - 14 = 1 \text{ cm}$

$$q_{max.} = \frac{M_t}{2 A_{mean} t_{min.}}$$

$$R_{mean} = \frac{15 + 14}{2} = 14.5$$

$$0.80 = \frac{M_t}{2 * (\pi 14.5^2) (1)}$$

$$M_t = 1056 \text{ cm.t}$$

Sec.5

هذا القطاع *Thin walled section* لأن الـ *Thickness* صغير جدا حيث انه $t = 15 - 14 = 1 \text{ cm}$

$$q_{max.} = \frac{M_t * t_{max.}}{\frac{1}{3} \sum b t^3}$$

$$R_{mean} = \frac{15 + 14}{2} = 14.5$$

$$0.80 = \frac{M_t * 1}{\frac{1}{3} * (2 * \pi 14.5) (1)^3}$$

$$M_t = 24.3 \text{ cm.t}$$

لاحظ أن Sec4 يقاوم *Torsion* أكثر من Sec5 بـ 43.5 مرة
و هذا معناه أن مقاومة الـ *Closed Thin walled section*
أكبر بكثير من الـ *Open Thin walled section*

Sec.6

$$q_{max.} = \frac{M_t * t_{max.}}{\frac{1}{3} \sum b t^3}$$

$$= \frac{M_t * 3}{\frac{1}{3} (10 * 2^3 + 30 * 3^3)}$$

$$M_t = 31 \text{ cm.t}$$